TITLE:

小Cartan複体とホモトピー (変換群の幾何とその周辺)

AUTHOR(S):

山崎, 啓太

CITATION:
山崎, 啓太. 小Cartan複体とホモトピー (変換群の幾何とその周辺). 数理解析研究所講究録 2008, 1612: 62-68

ISSUE DATE:
2008-09

URL:
http://hdl.handle.net/2433/140079

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
第1612巻 2008年 62-68

小Cartan複体とホモトピー
(The small Cartan complex and homotopy)

大阪大学大学院 理学研究科　山崎 啓太 (Keita YAMASAKI)
Graduate School of Science, Osaka University

1　はじめに

M をコンパクト連結 Lie 群 G が作用する Lie 群，$\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数とする．$\{e_a\}$ を $\mathfrak{g}$ の基底，$v^a \in S\mathfrak{g}^*$ をその双対基底に対応する対称代数の生成元とするとき，Cartan 複体

$$(S\mathfrak{g}^* \otimes \Omega(M))_{\mathrm{inv}}, \quad 1 \otimes \mathrm{d} - \sum_a v^a \otimes \iota(e_a)$$

が M の同変コホモロジーを与えることはよく知られている．$\{c_j\}$ を $(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$ の primitive な生成元，$\{p^j\}$ をその双対基底に Chevalley's transgression theorem によって対応する $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ の生成元とする．このとき Goresky-Kottwitz-MacPherson [2] は，より“小さい”複体

$$(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes \Omega(M)_{\mathrm{inv}}, \quad 1 \otimes \mathrm{d} - \sum_j p^j \otimes \iota(c_j)$$

が Cartan 複体と擬同型になると主張した．彼らの証明にはギャップが発見されたが，Alekseev-Meinrenken [1] によって，2つの複体がホモトピー同値であることが示された．これにより，この新しい複体は M の同変コホモロジーを与えることがわかった．

Alekseev-Meinrenken による証明は，安直に包含写像 $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes \Omega(M)_{\mathrm{inv}} \hookrightarrow (S\mathfrak{g}^* \otimes \Omega(M))_{\mathrm{inv}}$ を考えるのではなく，ある次数0の $f \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge\mathfrak{g})^-)_{\mathrm{inv}}$ を用いて

$$(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes \Omega(M)_{\mathrm{inv}} \hookrightarrow (S\mathfrak{g}^* \otimes \Omega(M))_{\mathrm{inv}} \xrightarrow{e^{\iota(f)}} (S\mathfrak{g}^* \otimes \Omega(M))_{\mathrm{inv}} \tag{1}$$

と捩った写像を考え，そのホモトピーを直接構成するというものだった．ここで f は次の Maurer-Cartan 型方程式

$$\partial f + \frac{1}{2}[f, f]_{\wedge\mathfrak{g}} + \sum_a v^a \otimes e_a = \sum_j p^j \otimes c_j$$

の次数0の解であり，その解を構成するところが重要なポイントであった．

さてここで自然な問いとして (1) がどれぐらい f に依存するのか？ということである．Alekseev-Meinrenken は異なる2つの解を用いてつくった写像はホモトピー同値であると主張しているが ([1, Theorem 4.6])，この証明では擬同型までしか示されていない．そこで本稿では，この問いの条件付きの解答を与える．

謝辞：著者は A. Alekseev 教授および E. Meinrenken 教授に心から感謝したい．本稿は彼らの仕事を理解する試みから生まれたからである．

2 $\mathfrak{g}$-微分空間

$(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ を標数0の体 $\mathbb{F}$ 上の Lie 代数とする．

定義 2.1. $\mathfrak{g}$-空間とは DG (Differential Graded) 空間 $(\mathcal{M}, \mathrm{d}^{\mathcal{M}})$，そして線型写像

$$L^{\mathcal{M}},\ \iota^{\mathcal{M}} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathcal{M}),$$

の組であり，以下の条件をみたすものとする：

- $\xi \in \mathfrak{g}$ に対して $L^{\mathcal{M}}(\xi)$, $\iota^{\mathcal{M}}(\xi)$ の次数はそれぞれ $0, -1$,
- $[\mathrm{d}^{\mathcal{M}}, \iota^{\mathcal{M}}(\xi)] = L^{\mathcal{M}}(\xi)$,
- $[L^{\mathcal{M}}(\xi), \iota^{\mathcal{M}}(\xi')] = \iota^{\mathcal{M}}([\xi, \xi']_{\mathfrak{g}})$,
- $[\iota^{\mathcal{M}}(\xi), \iota^{\mathcal{M}}(\xi')] = 0$. □

以下では，$\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$-微分空間とするとき，$\mathcal{M}_{\mathrm{inv}} := \bigcap_{\xi\in\mathfrak{g}} \ker L^{\mathcal{M}}(\xi)$, $\mathcal{M}_{\mathrm{hor}} := \bigcap_{\xi\in\mathfrak{g}} \ker \iota^{\mathcal{M}}(\xi)$，そして $\mathcal{M}_{\mathrm{basic}} := \mathcal{M}_{\mathrm{inv}} \cap \mathcal{M}_{\mathrm{hor}}$ と書くことにする．

また $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ を $\mathfrak{g}$-微分空間とするとき，$\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}'$ は $\mathrm{d}^{\mathcal{M}} \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{d}^{\mathcal{M}'}$ などを考えることにより，自然に $\mathfrak{g}$-微分空間となることを注意しておこう．

$\wedge\mathfrak{g}^*$ を $\mathfrak{g}^*$ の外積代数として，その次数を

$$(\wedge\mathfrak{g}^*)^i := \wedge^i\mathfrak{g}^*,$$

と定める．また $S\mathfrak{g}^*$ を $\mathfrak{g}^*$ の対称代数として，その次数を

$$(S\mathfrak{g}^*)^{2i} := S^i\mathfrak{g}^*, \quad (S\mathfrak{g}^*)^{2i+1} := 0$$

と定める．$\{e_a\}$ を $\mathfrak{g}$ の基底，$\{e^a\}$ をその双対基底とする．以下では

$$y^a := e^a \in \wedge^1\mathfrak{g}^*, \quad v^a := e^a \in S^1\mathfrak{g}^*$$

と表すことにする．

例 2.2. (a) G を Lie 群, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数, そして M を G が作用する多様体とする. $\mathfrak{g}$-微分空間の典型例は M 上の微分形式からなる空間 $\Omega(M)$ である. ただしその Lie 微分と contraction は G の作用の infinitesimal generator によるものとする.
(b) 外積代数 $\wedge\mathfrak{g}^*$ は余随伴表現 $L^\wedge$, contraction $\iota^\wedge(\xi)$, そして微分

$$\mathrm{d}^\wedge := \frac{1}{2}\sum_a y^a L^\wedge(e_a)$$

を考えることにより $\mathfrak{g}$-微分空間になる. □

ここから $\mathfrak{g}$ を簡約 Lie 代数と仮定する. $\mathfrak{g}$ の外積代数 $\wedge\mathfrak{g}$ の次数は

$$(\wedge\mathfrak{g})^{-i} := \wedge^i\mathfrak{g}, \quad (\wedge\mathfrak{g})^i := 0 \qquad (i \geq 0)$$

と定める. $\wedge\mathfrak{g}$ と $\wedge\mathfrak{g}^*$ の間の非退化な pairing $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を用いて, 微分 $\partial : \wedge\mathfrak{g} \to \wedge\mathfrak{g}$ を

$$\langle \mathrm{d}^\wedge X, Y\rangle = \langle X, \partial Y\rangle, \quad X \in \wedge\mathfrak{g}^*, \ Y \in \wedge\mathfrak{g}.$$

によって定義する. 同様に contraction $\iota^* : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\wedge\mathfrak{g})$ を

$$\langle \xi \cdot X, Y\rangle = \langle X, \iota^*(\xi)Y\rangle, \quad X \in \wedge\mathfrak{g}^*, \ Y \in \wedge\mathfrak{g}.$$

で定義する. $[\cdot,\cdot]_{\wedge\mathfrak{g}}$ を Schouten 括弧とするとき, 微分 ∂ と $[\cdot,\cdot]_{\wedge\mathfrak{g}}$ を考えれば ($\wedge\mathfrak{g}$ ではなく) $(\wedge\mathfrak{g})[1]$ が DG Lie 代数になることを注意しておく. ここで $(\wedge\mathfrak{g})[1]$ は $(\wedge\mathfrak{g})[1]^i := (\wedge\mathfrak{g})^{i+1}$ なる次数付き空間とする.

$(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$ を $\wedge\mathfrak{g}$ の随伴表現による不変部分空間とする. $\mathfrak{g}$ は簡約 Lie 代数であるから, $\wedge\mathfrak{g}$ と $\wedge\mathfrak{g}^*$ の間の pairing は $(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$ と $(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ の間の非退化な pairing に制限される. これより $(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ の積が $(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$ の余積 Δ を導く. $x \in (\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$ が primitive であるとは

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

を満たすこととする. $(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ においても primitive な元を同様に定義する. $\mathcal{P}, \mathcal{P}^*$ をそれぞれ $(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$, $(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ の primitive な元からなる部分空間とすると, よく知られているように, $(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$ と $(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ の間の pairing は $\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}^*$ の間の pairing に制限される. よって $\mathcal{P}^*$ は $\mathcal{P}$ の双対空間になるので, $\{c_j\}$ を $\mathcal{P}$ の基底, $\{c^j\}$ をその双対基底とする.

$L^S(\xi)$ は余随伴表現を $S\mathfrak{g}^*$ の次数 0 の derivation に拡張したものとして, その不変部分空間を $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ と表す. Chevalley's transgression theorem によって c^j に対応する $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ の元を p^j と表す (例えば [1] 参照). $\deg p^j = \deg c^j + 1$ であることを注意しておく.

3 小Cartan複体

定義 3.1. $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$-微分空間とする．$\mathcal{M}$ の Cartan 複体とは DG $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-加群

$$C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) := (S\mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{M})_{\mathrm{inv}}, \quad \mathrm{d}_{\mathfrak{g}}^C := 1 \otimes \mathrm{d}^{\mathcal{M}} - \sum_a v^a \otimes \iota^{\mathcal{M}}(e_a),$$

であり，そのコホモロジー $H_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) := H(C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}), \mathrm{d}_{\mathfrak{g}}^C)$ が $\mathcal{M}$ の同変コホモロジーの Cartan モデルと呼ばれる． □

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ の場合を考えて，G をコンパクト連結 Lie 群，$\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数，そして M を G が作用している多様体とする．このとき $H_{\mathfrak{g}}(\Omega(M))$ は M の同変 (Borel) コホモロジー $H(EG \times_G M; \mathbb{R})$ と同型であり，シンプレクティック幾何学等でとても重要な道具として用いられている．

さて以下では $\mathfrak{g}$ を簡約 Lie 代数と仮定して，Cartan 複体より "小さな" 複体を考えたい．

$\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$-微分空間として，線型写像 $\iota^{\mathcal{M}} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathcal{M})$ を次数付き代数の準同型写像 $\iota^{\mathcal{M}} : \wedge\mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathcal{M})$ に拡張しておき，以下を定義する．

定義 3.2. $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$-微分空間とする．$\mathcal{M}$ の小 Cartan 複体とは DG $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-加群

$$\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) := (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes \mathcal{M}_{\mathrm{inv}}, \quad \tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}}^C := 1 \otimes \mathrm{d}^{\mathcal{M}} - \sum_j p^j \otimes \iota^{\mathcal{M}}(c_j),$$

であり，そのコホモロジー $\tilde{H}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) := H(\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}), \tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}}^C)$ が同変コホモロジーの小 Cartan モデルと呼ばれる． □

Goresky-Kottwitz-MacPherson [2] は $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ と $C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ が擬同型であると主張した．ただしその証明にはギャップが指摘されたが，Alekseev-Meinrenken [1] により正しいことが示された．

Alekseev-Meinrenken の議論のポイントは，$(\wedge\mathfrak{g})^- := \bigoplus_{i>0} \wedge^i \mathfrak{g}$ とするとき，次の方程式の次数 0 の解 $f \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge\mathfrak{g})^-)_{\mathrm{inv}}$ が存在することを示したことである ([1, Theorem 3.6])：

$$\partial f + \frac{1}{2}[f, f]_{\wedge\mathfrak{g}} + \sum_a v^a \otimes e_a = \sum_j p^j \otimes c_j. \tag{2}$$

そして次を示した．

定理 3.3 ([1, Theorem 4.2]). $\mathfrak{g}$ を簡約 Lie 代数，$\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$-微分空間とする．方程式 (2) の任意の解 $f \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge\mathfrak{g})^-)_{\mathrm{inv}}$ に対して，合成写像

$$\Phi : \tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \hookrightarrow C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \xrightarrow{e^{\iota(f)}} C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$$

はDG $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-加群としてホモトピー同値写像である．特に，これは同型写像 $\tilde{H}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} H_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ を導く． □

ここで上記ホモトピー同値写像 Φ は (2) の解 f に依存する．Alekseev-Meinrenken は「Φ は up to homotopy で f には依存しない」と主張しているが ([1, Theorem 4.6])，彼らの議論では up to homotopy ではなく up to quasi-isomorphism までしか示されていない．そこで次節では，ある条件のもと，上の主張を示す．

4 小 Cartan 複体とホモトピー

簡単のためこの章では $\mathfrak{k} := (S\mathfrak{g}^* \otimes \wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$, $\mathfrak{l} := (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes (\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$ と書くことにする．まず $s \in \mathfrak{k}_{\mathrm{odd}}$ に対して

$$\exp(s) \cdot f_0 := e^{\mathrm{ad}_s} f_0 - j^R(\mathrm{ad}_s)\partial s$$

とする．ただし $j^R(z) = (e^z - 1)/z$, $\mathrm{ad}_s = [s, \cdot]_{\wedge\mathfrak{g}}$ である．このとき Alekseev-Meinrenken は方程式 (2) の異なる 2 つの次数 0 の解 f_0, $f_1 \in \mathfrak{k}$ に対して，ある $s \in \mathfrak{k}_{\mathrm{odd}}$ が存在して

$$f_1 - \exp(s) \cdot f_0 \in \mathfrak{l}^0$$

が成り立つことを示した ([1, Theorem 3.8])．

以下では $((\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}})_{\mathrm{even}} = 0$ と仮定する．このとき $\mathfrak{l}_{\mathrm{even}} = 0$ となることに注意すると $f_1 = \exp(s) \cdot f_0$ が成り立つことがわかる．そこで $t \in \mathbb{F}$ について

$$f(t) := \exp(ts) \cdot f_0 = e^{\mathrm{ad}_{ts}} f_0 - j^R(\mathrm{ad}_{ts})\partial(ts)$$

とおくことにする．$f(t)$ は方程式 (2) の解であり，

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) + \partial s + [f(t), s]_{\wedge g} = 0 \tag{3}$$

が成り立つことを注意しておく．

さて $\mathfrak{g}$-微分空間 $\mathcal{M}$ に対して線型写像

$$H(t) := \Phi(t) \circ \iota(s) : (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes \mathcal{M}_{\mathrm{inv}} \to (S\mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{M})_{\mathrm{inv}}$$

を考える．ここで $\Phi(t) := e^{f(t)} : (S\mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{M})_{\mathrm{inv}} \to (S\mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{M})_{\mathrm{inv}}$ である．また簡単な計算により

$$[1 \otimes \mathrm{d}, \iota(s)] = -\iota(\partial s) + \sum_a \iota(\iota^*(e^a)s)L(e_a)$$

であることがわかり ([1, Lemma 2.1]), さらに

$$\mathrm{d}_{\mathfrak{g}} \circ \Phi(t) = \Phi(t) \circ \left(\tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}} + \sum_a \iota(\iota^*(e^a) f(t)) \circ L(e_a) \right)$$

が成り立つことがわかる ([1, Lemma 2.2] を参照).
以上のことにより

$$\begin{aligned} H(t) \circ \tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}} + \mathrm{d}_{\mathfrak{g}} \circ H(t) &= \Phi(t) \circ \iota(s) \circ \tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}} + \mathrm{d}_{\mathfrak{g}} \circ \Phi(t) \circ \iota(s) \\ &= \Phi(t) \circ \iota(s) \circ \tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}} + \Phi(t) \circ \left(\tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}} + \sum_a \iota(\iota^*(e^a) f(t)) \circ L(e_a) \right) \circ \iota(s) \\ &= \Phi(t) \circ [1 \otimes \mathrm{d}, \iota(s)] + \Phi(t) \circ \left(\sum_a \iota(\iota^*(e^a) f(t)) \circ L(e_a) \circ \iota(s) \right) \\ &= \Phi(t) \circ [1 \otimes \mathrm{d}, \iota(s)] + \Phi(t) \circ \left(\sum_a \iota(\iota^*(e^a) f(t)) \circ \iota(L(e_a) s) \right) + \dots \\ &= -\Phi(t) \circ (\iota(\partial s) + [f(t), s]) + \dots \\ &= \Phi(t) \circ \iota \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) \right) + \dots \\ &= \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}(t) + \dots . \end{aligned}$$

ここで "$\cdots$" は $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes \mathcal{M}_{\mathrm{inv}}$ 上で消える項を示し, 下から 2 番目の等号は (3) を用いた. これにより次が示された.

定理 4.1. $\mathfrak{g}$ を簡約 Lie 代数, $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$-微分空間とする. $((\wedge \mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}})_{\mathrm{even}} = 0$ ならば, 方程式 (2) の任意の解 $f \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge \mathfrak{g})^-)_{\mathrm{inv}}$ に対して定理 3.3 の中で定義された合成写像

$$\Phi : \tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \hookrightarrow C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \xrightarrow{e^{\iota(f)}} C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$$

は f の選び方に up to homotopy で依存しない.

参考文献

[1] A. Alekseev, E. Meinrenken, *Equivariant cohomology and the Maurer-Cartan equation*, Duke Math. J. 130 (2005), no. 3, 479–521.

[2] M. Goresky, R. Kottwitz, and R. MacPherson, *Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem*, Invent. Math. 131 (1998), no. 1, 25–83.

[3] V. Guillemin. S. Sternberg. *Supersymmetry and equivariant de Rham theory*. Springer-Verlag. 1999.